3D графика и трасиране на лъчи v.4.0

http://raytracing-bg.net/

Тема 7

Монте-Карло методи
Триъгълни мрежи
Нормали

Съдържание

- Анонси
- Нововъведения в учебния рейтрейсър
- Увод в Монте-Карло методите
- Триъгълни мрежи
  - Мотивация
  - Реализация на триъгълните мрежи
    - Пресичане с триъгълник
    - UV координати
  - Нормали в триъгълните мрежи

Анонси

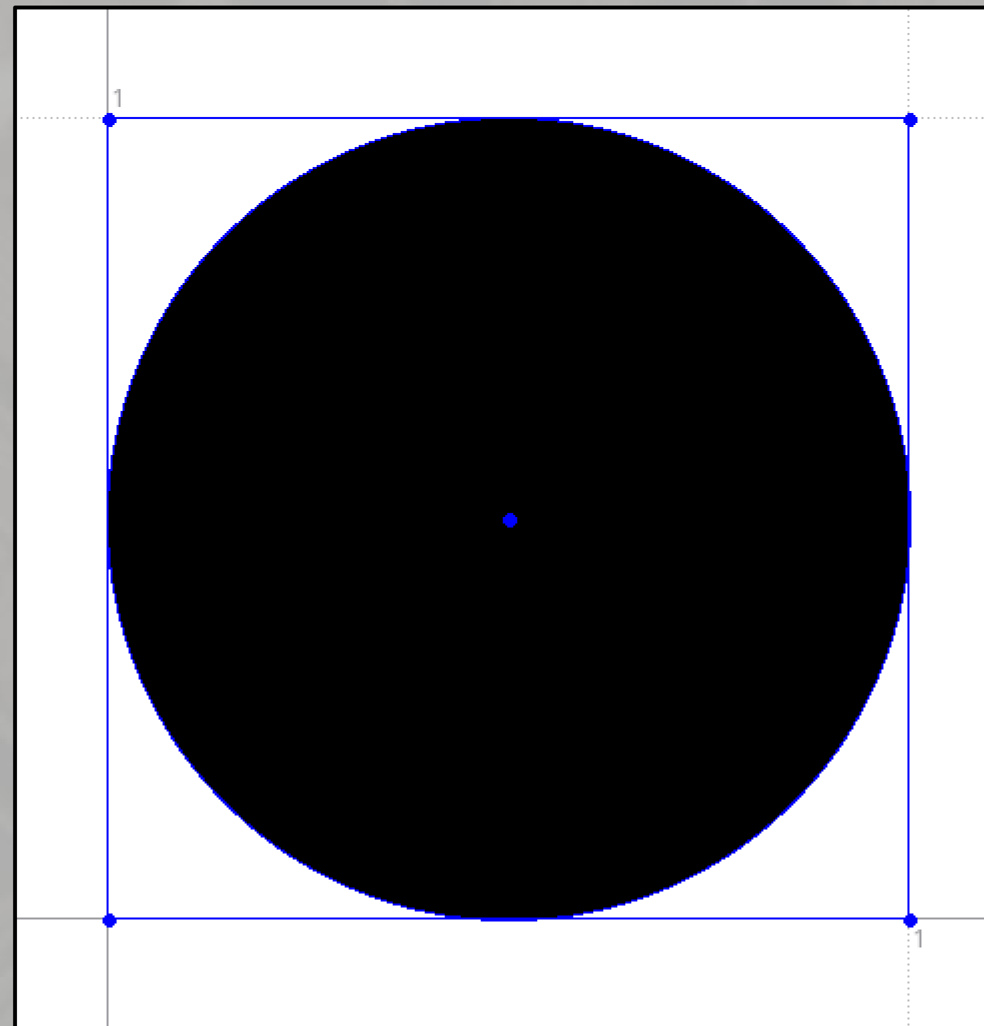
- Тест на 2ри Декември (след 2 седмици)
  - По време на първия час, от 18:20ч, продължителност – 20 минути
- Няма да има домашни за тази лекция
- Курсови проекти

Увод в Монте-Карло методите

- Много добра лекция имаше в CG[2] 2015 – [youtube]
- Вече ползвахме Монте-Карло методи за Anti-aliasing и за грапавите отражения
- Най-общо: ако искаме да намерим средната стойност на някаква функция, можем да вземем N случайни параметъра, да сметнем функцията в тях, и да усредним
  - Anti-aliasing: $f(\Delta x, \Delta y) := \text{raytrace}(\text{getScreenRay}(x + \Delta x, y + \Delta y))$
    - Деф. област: $0 \leq \Delta x, \Delta y \leq 1$
  - Glossy: $f(dx, dy) := \text{raytrace}(\text{reflect}(\text{ray}, \text{mangle_normal}(dx, dy)))$
    - Деф. област: $dx^2 + dy^2 \leq \tan((1 - \text{glossiness}) * \pi/2)^2$

Пример за прост Монте-Карло метод

- Ще пресметнем π чрез отношението между площите на кръг и описания около него квадрат
  - $S_{disc} = \pi r^2 = \pi * 0.5^2 = \pi/4$
  - $S_{box} = a*a = 1$
  - x, y – случайни точки в $[0..1]\times[0..1]$
  - $f(x, y) := ((x-½)^2 + (y-½)^2 \leq ¼)\ ?\ 1 : 0.$
  - Усредняваме f(x,y) за множество случайни x и y.



По-трудна задача

- Три точки са избрани случайно и равномерно в единичния квадрат. Каква е вероятността, триъгълникът, образуван от тези точки, да е остър?
- Имаме осветление от правоъгълна лампа. Каква част от лампата се „вижда“ в дадена точка от сцената?

Монте-Карло интегриране

- Монте-Карло интегриране:

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}$$

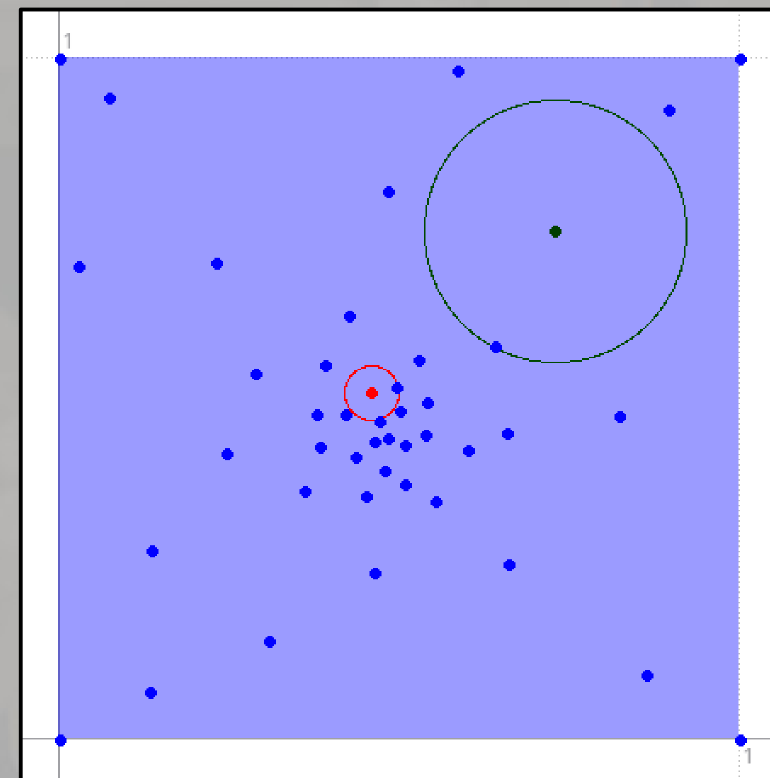
  - ***f(x)*** е функцията, чиито интеграл искаме да пресметнем
  - **Ω** е областта, в която пресмятаме определения интеграл
  - $\boldsymbol{x_i}$ са случайните точки, които random генератора избира
  - $\boldsymbol{\rho(x_i)}$ е вероятността точката x_i да бъде изтеглена
  - → Методът дава грешка, пропорционална на 1/sqrt(N)

Монте-Карло интегриране

- Функцията $\rho(x)$ нормира резултата, като взема под внимание формата на Ω, както и неравномерността на генерираните случайни точки
  - $\rho(x)$ е в смисъла на вероятностна плътност на генератора:
    - Когато генерираме равномерно-разпределени точки в единчината отсечка/квадрат, то $\rho(x) = 1$ навсякъде
    - Ако генерирахме случайни точки в [0..5], $\rho(x)$ щеше да е 0.2.
    - x in $[0..2]\times[0..2] \to \rho(x) = 0.25$
  - Можем да ползваме неравномерен генератор за техниката importance sampling

Importance sampling

- Можем да контролираме разпределението на случайния генератор и да искаме точките да са по-“нагъсто“ в областите, в които функцията е „интересна“
  - Например: по-гъсто семплиране в средата на квадрата
  - За сивата точка, *ρ(x)* ще е по-ниско, и точката ще участва с по-голяма тежест в сумата; това отразява факта, че точката е представител на по-голямо „кръгче“ около нея, в което няма други точки



Importance sampling – GI пример

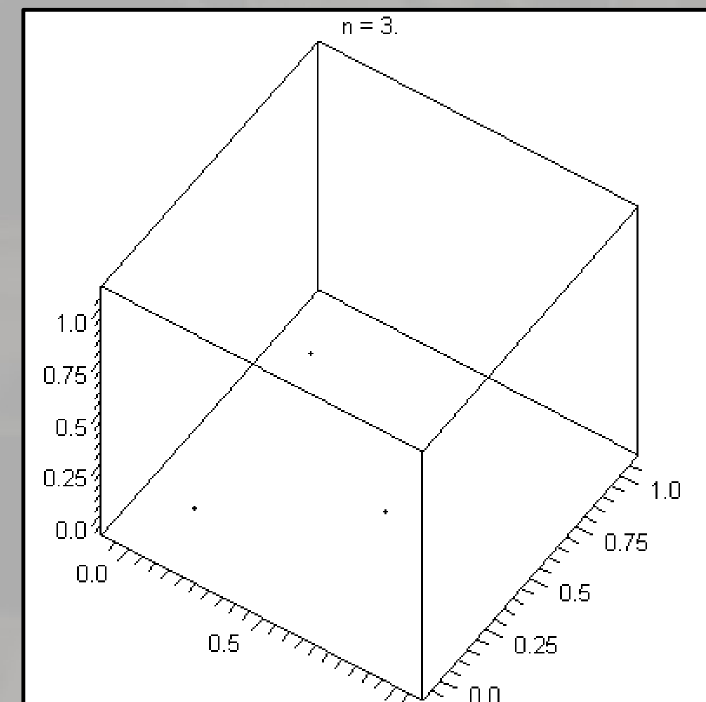
Image credit: renderstuff.com

Importance sampling – GI пример

- GI алгоритъма може да оценява индиректното осветление, като пуска случайни лъчи от точката
- Importance sampling евристика може да ни кара да пускаме повече лъчи в посоката на прозореца (в случая - „наляво“)
  - Делението на $\boldsymbol{\rho(x_i)}$ ни гарантира, че по-редките лъчи „надясно“ участват с по-голяма тежест, и сметката излиза вярна

Свойства на Монте-Карло методите

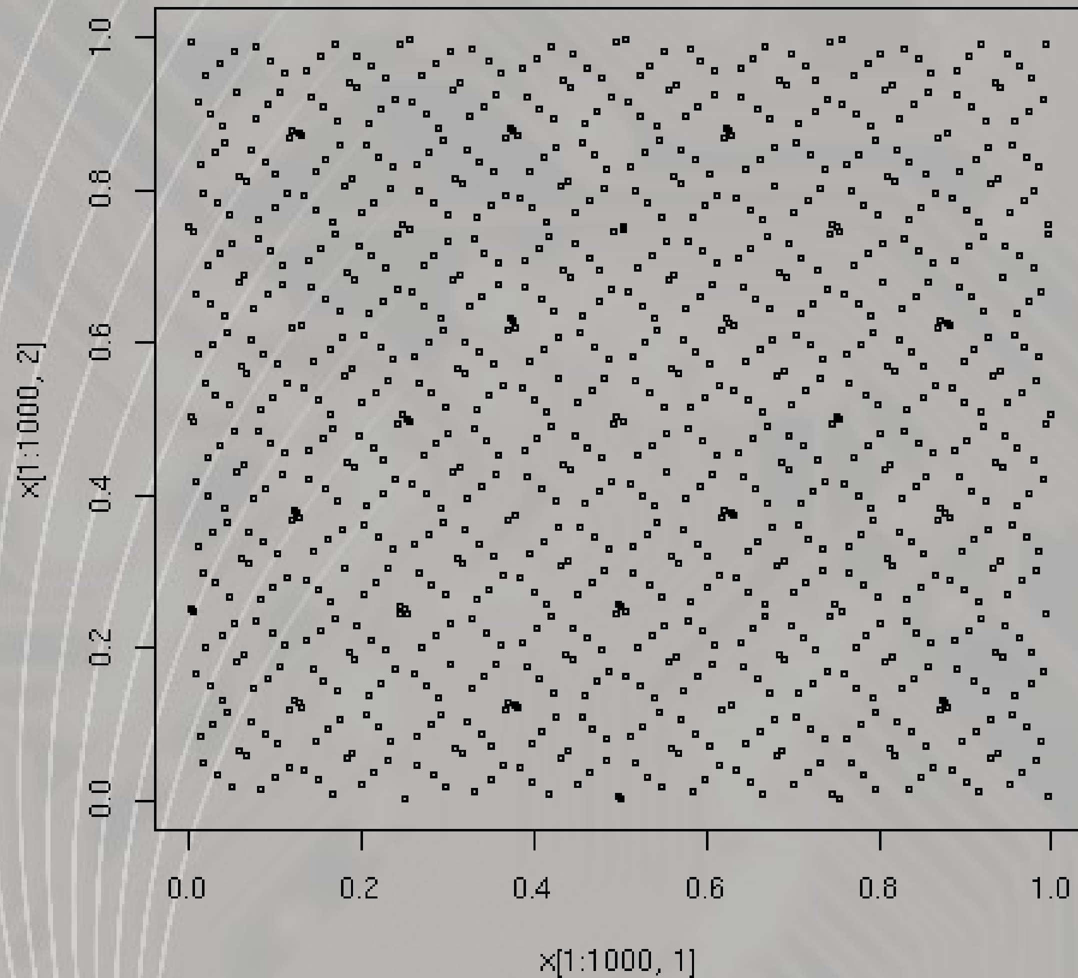
- Монте-Карло симулациите са силно чувствителни към качествата на случайния генератор
  - LCPRNG (rand() и колеги) се представят плачевно при по-високи размерности
    - Ще ползваме Mersenne Twister по-нататък
- Грешката на метода зависи основно от броя семпли, N
  - Може да се абстрахираме от „the curse of dimensionality“

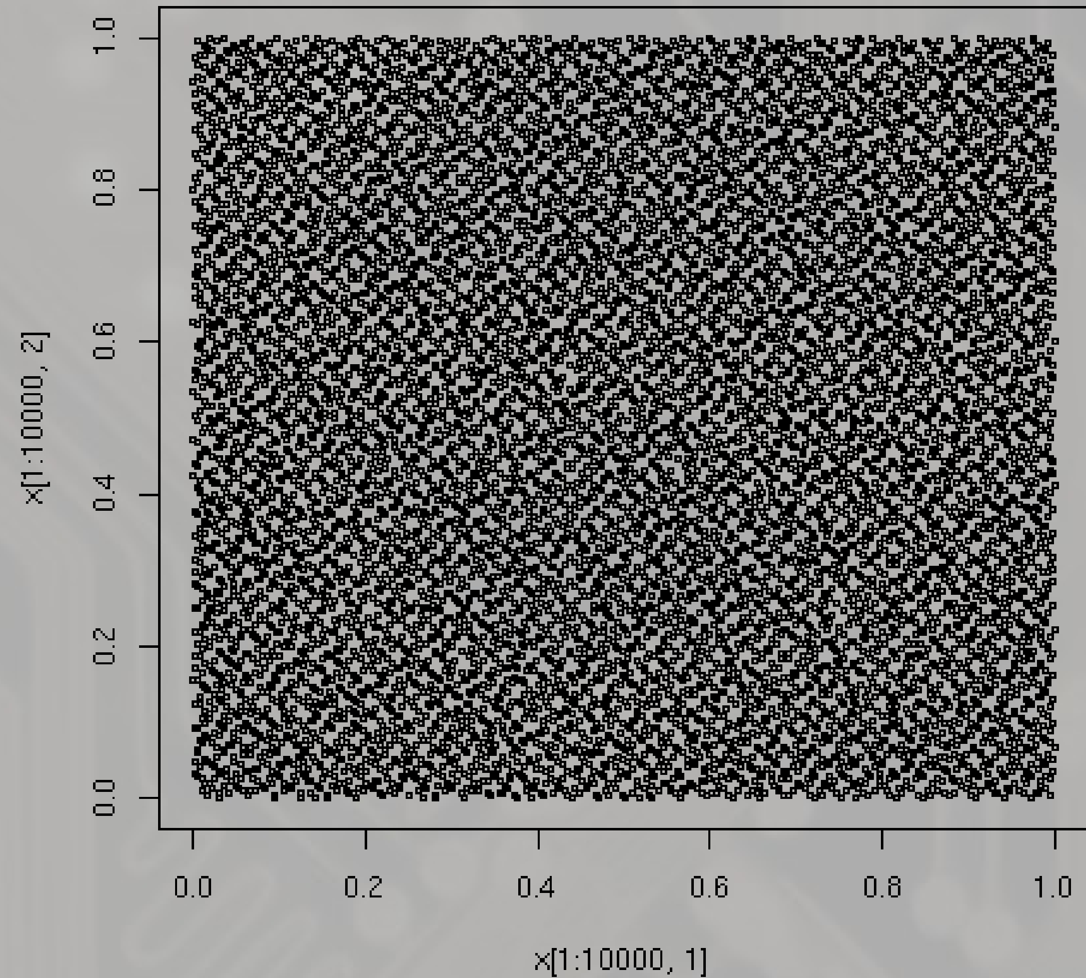


Оптимизации на Монте-Карло методите

- Stratified sampling
  - Ще дадем пример в лекция 10
- Low-discrepancy sequences
  - Чисто случайните точки често не запълват пространството „добре“ (струпвания, големи „дупки“, ...)
  - LDS приличат на случайни редици, но са напълно детерминистични, и гарантират „плътно“/„равномерно“ запълване на пространството (= по-малко шум при равен брой семпли)
  - Монте-Карло метод, ползващ LDS, се нарича QMC (квази-Монте-Карло)

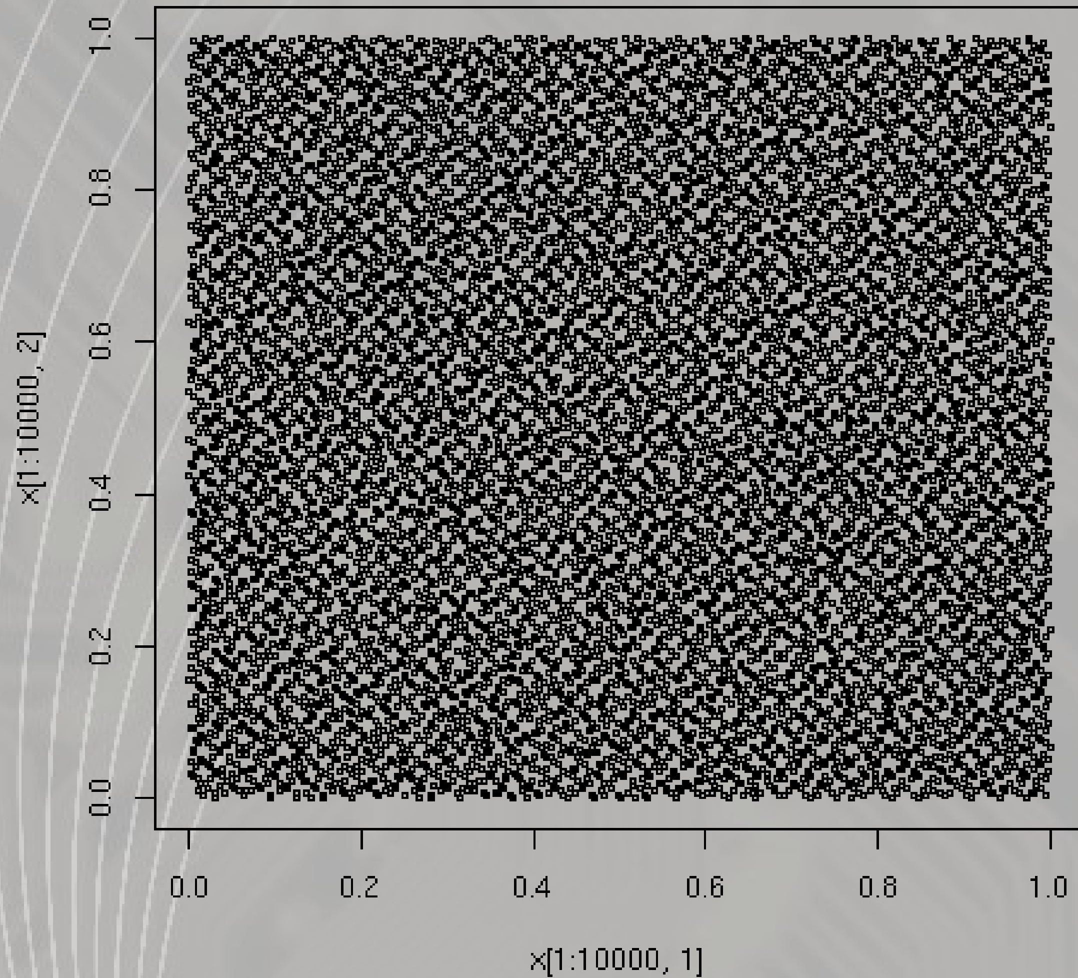
Low-discrepancy sequences - пример

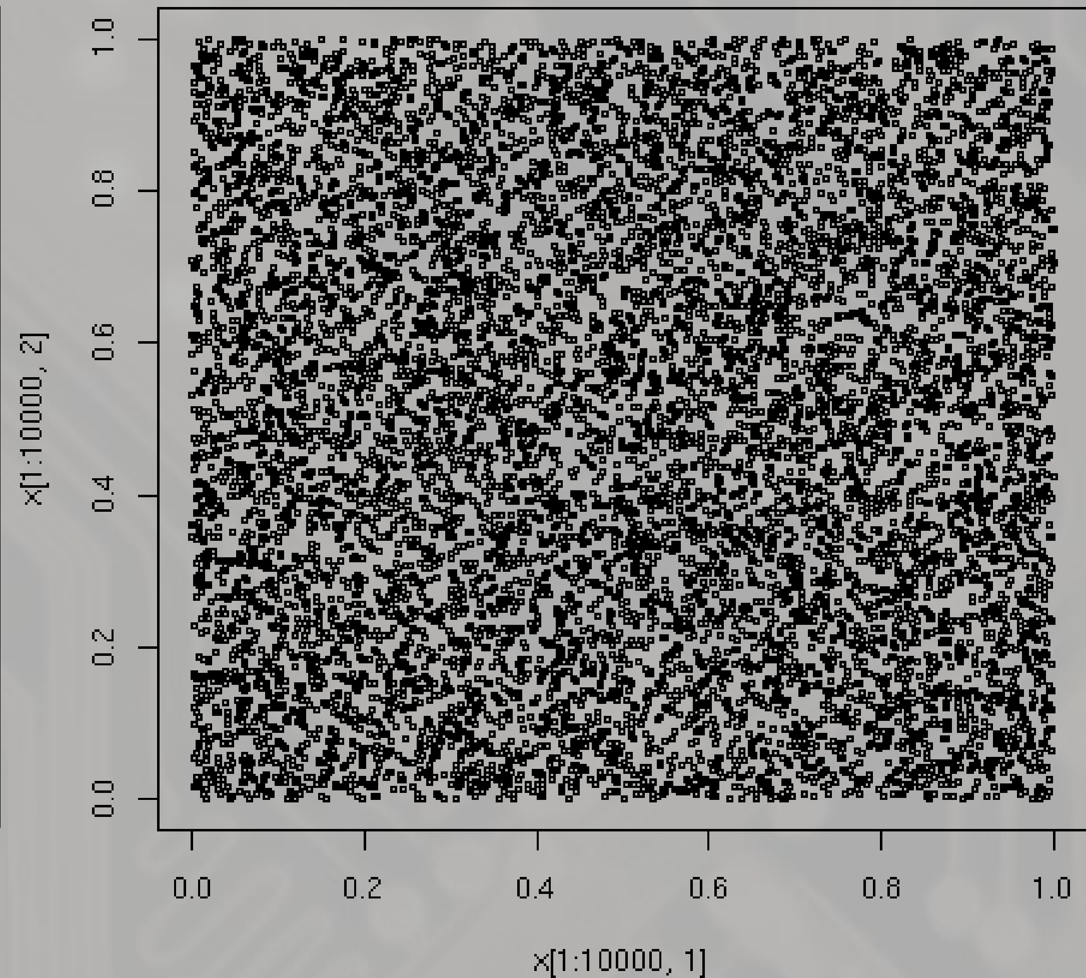




- Двумерно LDS с 1000 (ляво) и 10000 (дясно) точки

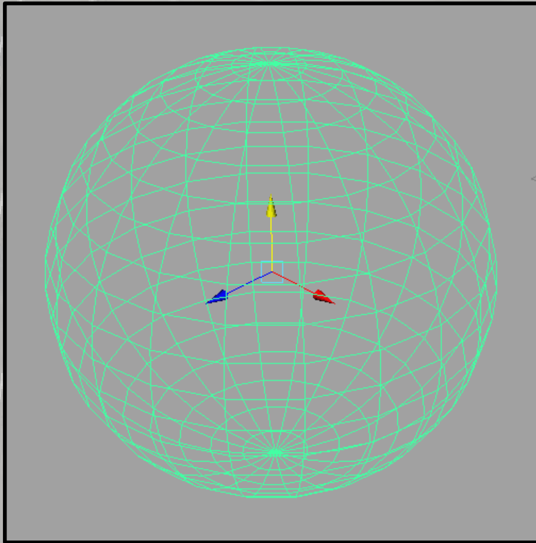
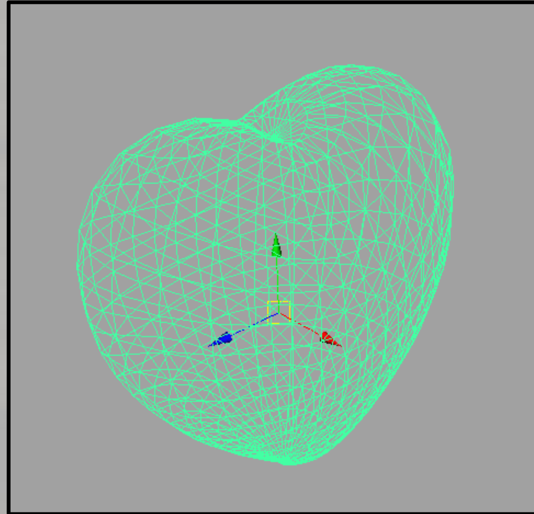
Low-discrepancy sequences - пример

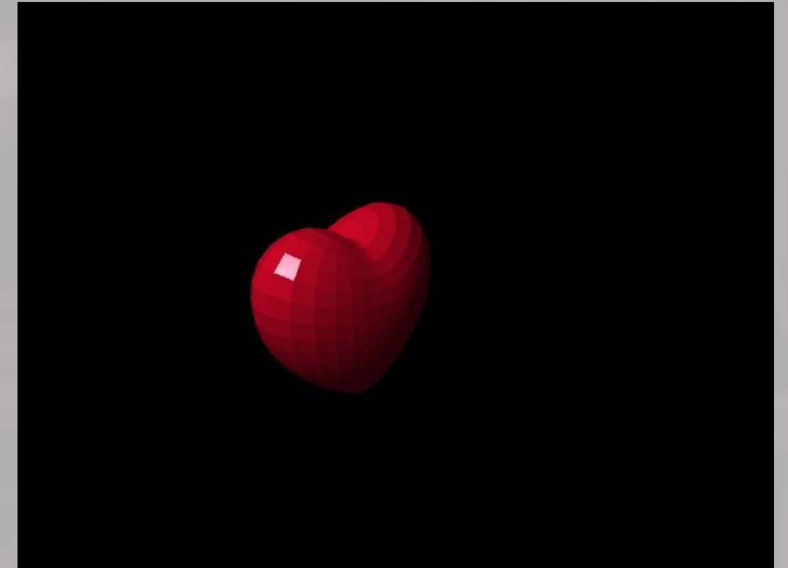
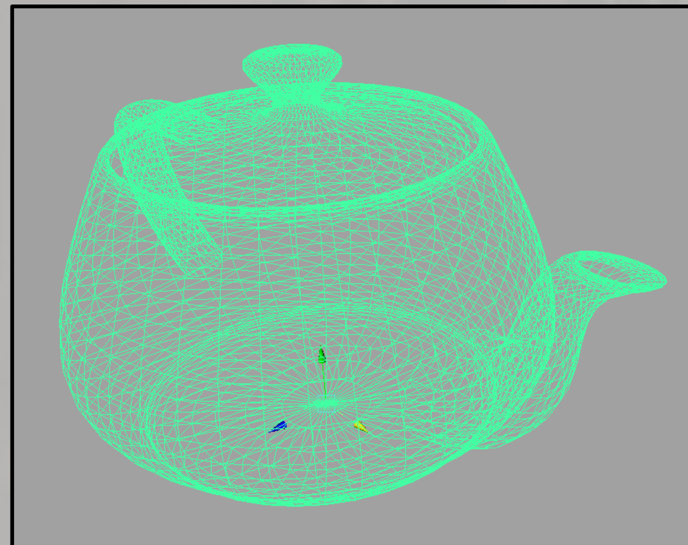
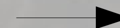




- LSD срещу чисто случайна редица

Триъгълни мрежи

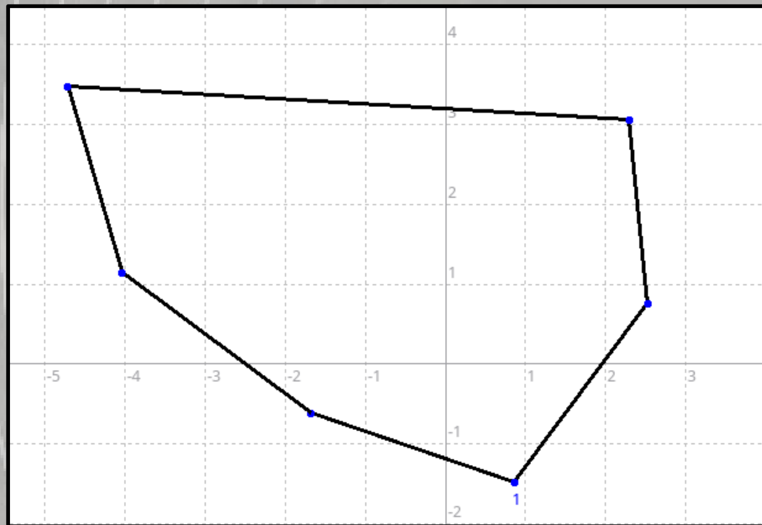




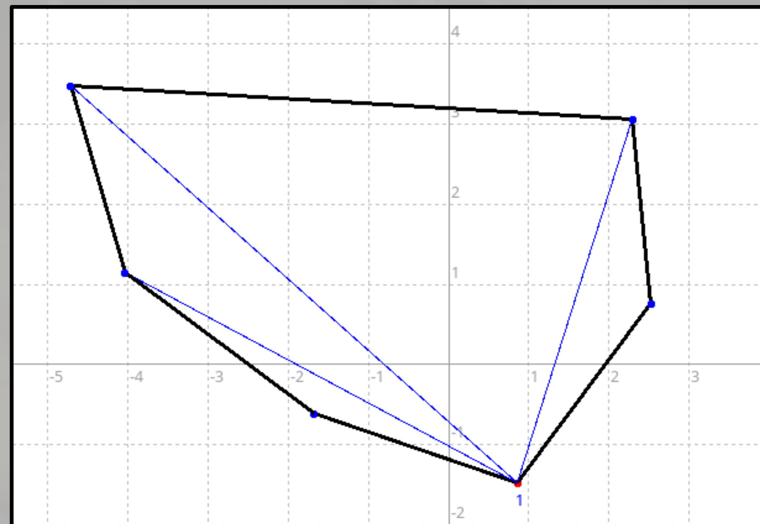
Триъгълни мрежи

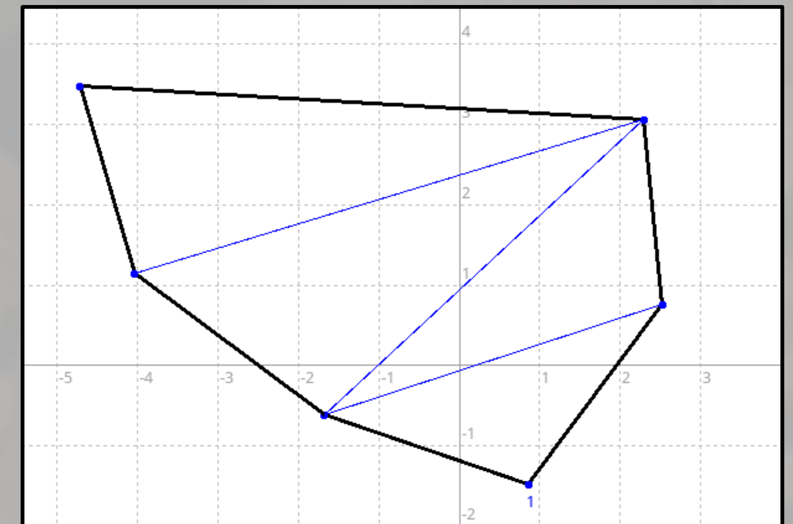
- Триъгълните мрежи са нещо универсално в съвременната компютърна графика
  - Z-buffer разчита изцяло на тях
- Основната идея: всички повърхности на 3D обектите да се нацепят на малки многоъгълници (с пасващи си страни и върхове между съседните многоъгълници)
- Често имаме контрол върху броя многоъгълници
  - Може да изберем колко фина да е мрежата; компромис между време за рендериране и качество

Терминология

- Mesh = триъгълна мрежа
- Триъгълник ≈ многоъгълник (полигон)
    - Изпъкналите многоъгълници се триангулират лесно







Мотивация за триъгълните мрежи

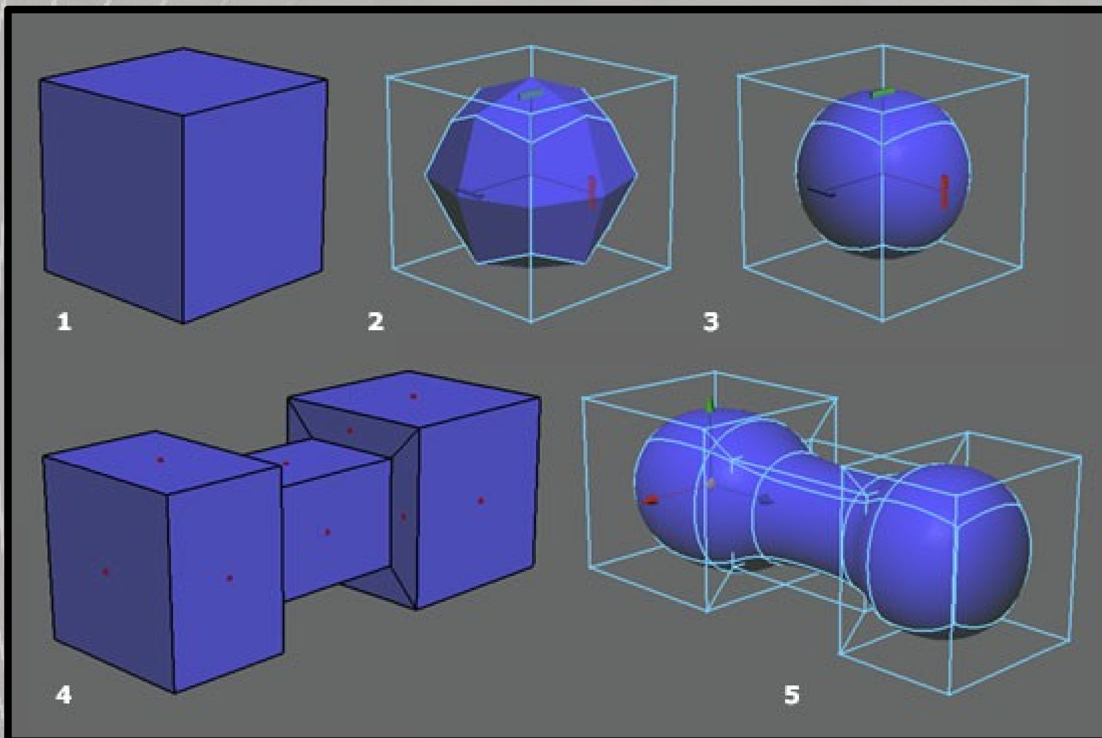
- Прости са (триъгълника е една от най-простите 3D фигури)
- Могат да наподобяват произволно добре практически всякаква друга геометрия
- Позволяват preview (по време на редактиране например), чрез Z-buffer или wireframe алгоритми
- Редактирането е лесно и доста интуитивно

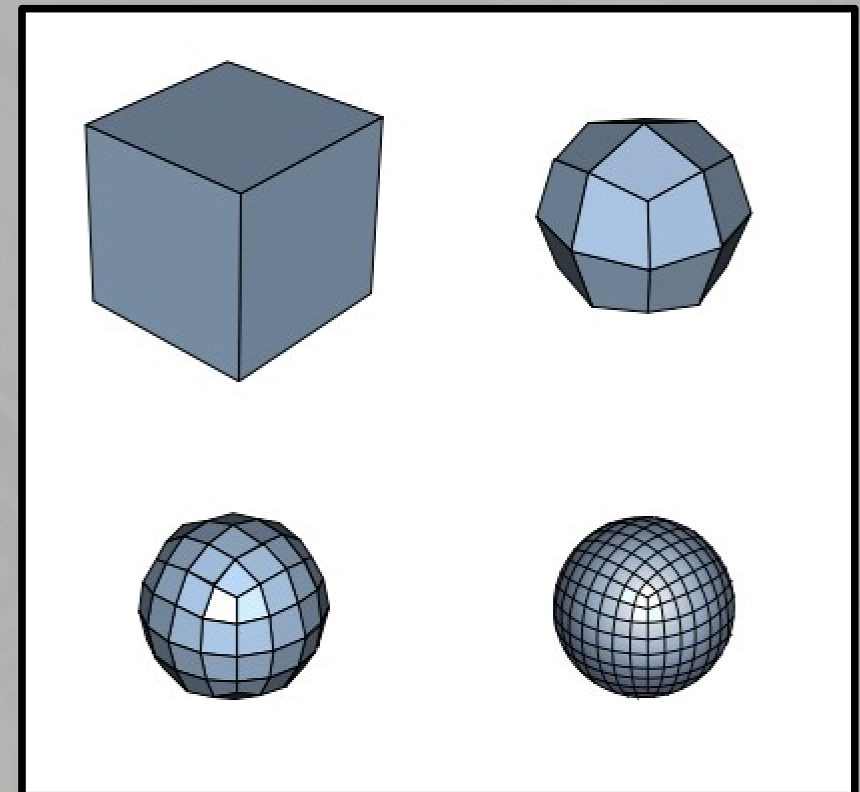
Примери за редактиране

- Местене на връх/върхове, ребра, триъгълници...
- Мащабиране и завъртане в произволна посока
- Рязане и цепене на триъгълници
- Операции като extrude (пресоване), огъване, ...
- Subdivision surfaces
  - Това е метод, при който от груба начална мрежа, чрез някакъв алгоритъм, се генерира нова триъгълна мрежа, която е по-фина от старата и представлява „загладена“ версия на старата мрежа

Subdivision surfaces

- Алгоритмите за subdivision са относително прости, но позволяват артистите да постигнат доста детайлен и прецизен обект без да се трудят много (започват от много груб модел)





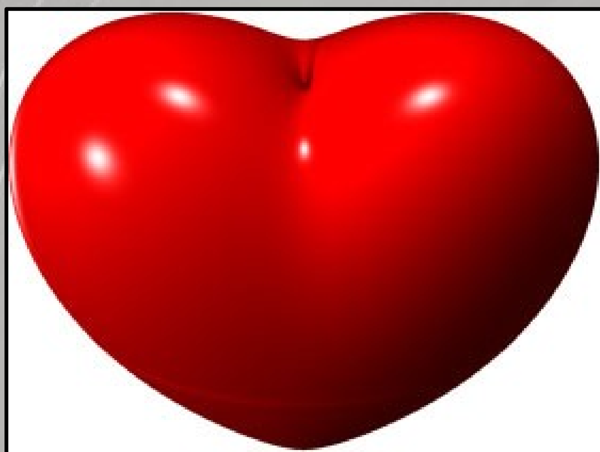
Как се създават триъгълните мрежи?

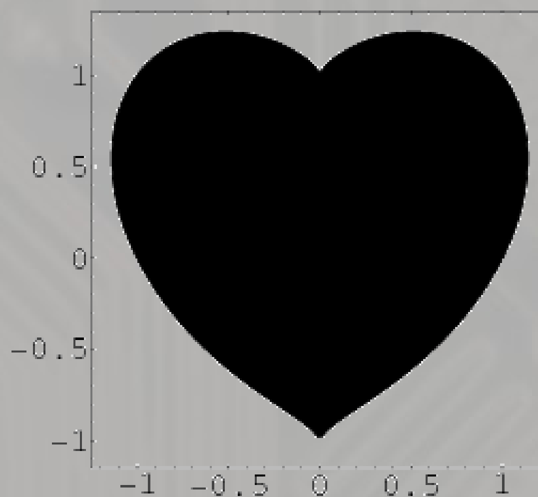
- Явни формули – за геометричните обекти като сфера, цилиндър, тор, куб, пирамида, призма...
  - Някои от тях са гладки, други не – триъгълните мрежи поддържат и двата вида повърхности – ще дадем пример по-нататък
- Неявни формули
  - Наричани още Isosurfaces, implicit surfaces и прочее
  - Повърхността се задават с формула от вида $f(x, y, z) = 0$, т.е. при дадена 3D функция, повърхността се състои от точките в пространството, за които функцията е 0

Как се създават триъгълните мрежи?

- Например, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ задава сфера с радиус 1
- По-сложните формули позволяват да се създават интересни форми: ето пример за повърхност с формата на сърце (изпъкнал кардиоид):

$$f(x,y,z) = \left(x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1\right)^3 - x^2 z^3 - \frac{9}{80} y^2 z^3 = 0$$





Как се създават триъгълните мрежи?

- Isosurface по принцип могат да се пресичат с лъчи, но обикновено е доста по-просто да се превърнат в триъгълни мрежи
  - Чрез алгоритъма „Marching Cubes“
- Сплайни
- Има програми, позволяващи създаването на 3D обекти, дефинирани като сплайни
  - Например, отделните детайли на една кола се моделират лесно като сплайн кръпки
  - Всъщност сплайните са измислени именно с тази цел!

Как се създават триъгълните мрежи?

- Трасирането на сплайни в 3D обаче е неудобно, затова често при самото рендериране, повърхностите се превръщат до триъгълни мрежи
- Може обектите да се моделират като мрежи още от самото начало
  - Чрез 3ds Max, Maya, Blender...
  - Един пример [youtube]

Как се създават триъгълните мрежи?

- Триъгълни мрежи могат да се създават и от релефни карти
  - Релефните карти представляват двумерна текстура, показваща „височината“ на някаква повърхност
    - Може да отговарят на истински релеф някъде из Земята (топографска карта), или изкуствено моделирани
  - Релефните карти също може да се трасират, но могат да се превърнат и в триъгълни мрежи (всеки пиксел от картата става връх в мрежата)

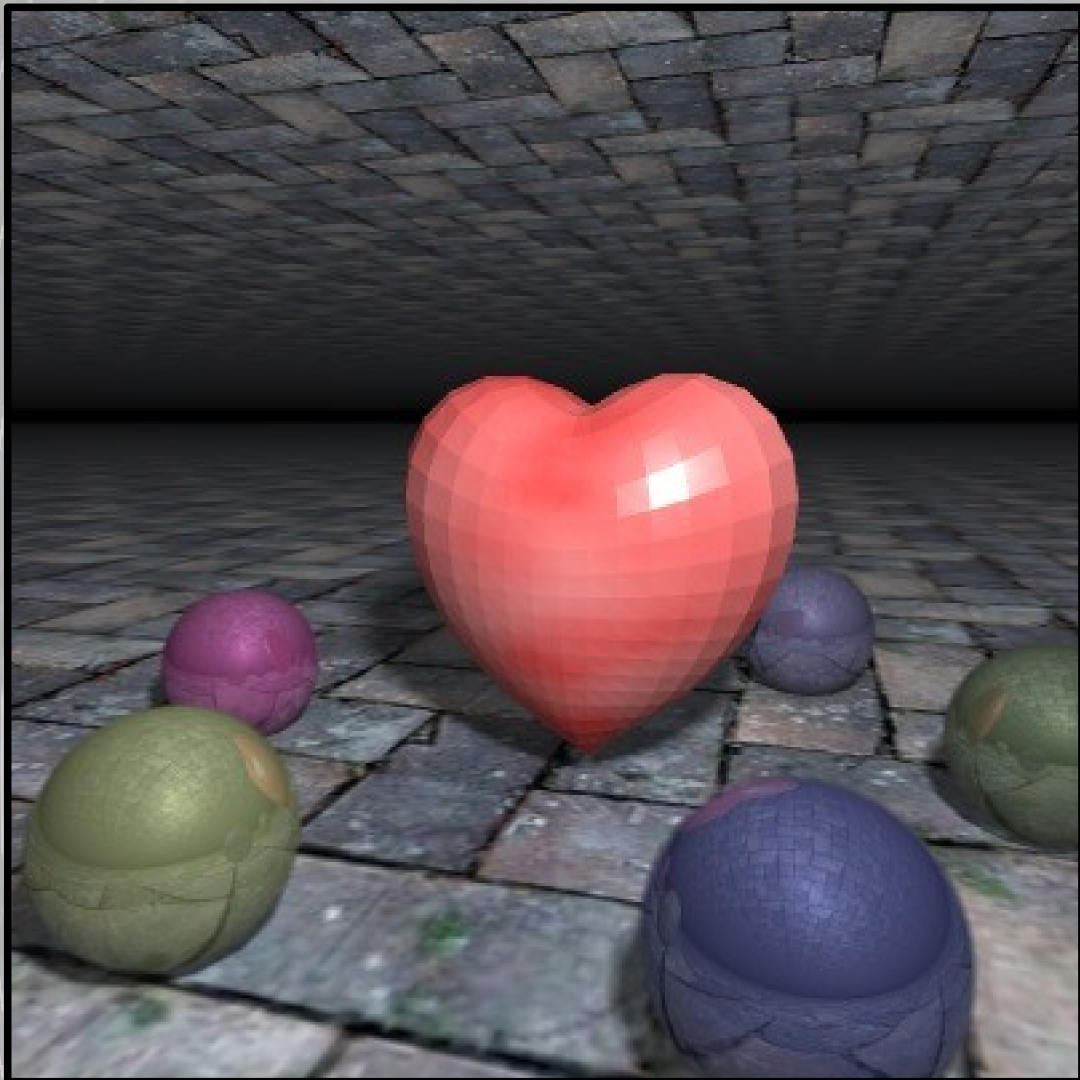
Как се създават триъгълните мрежи?

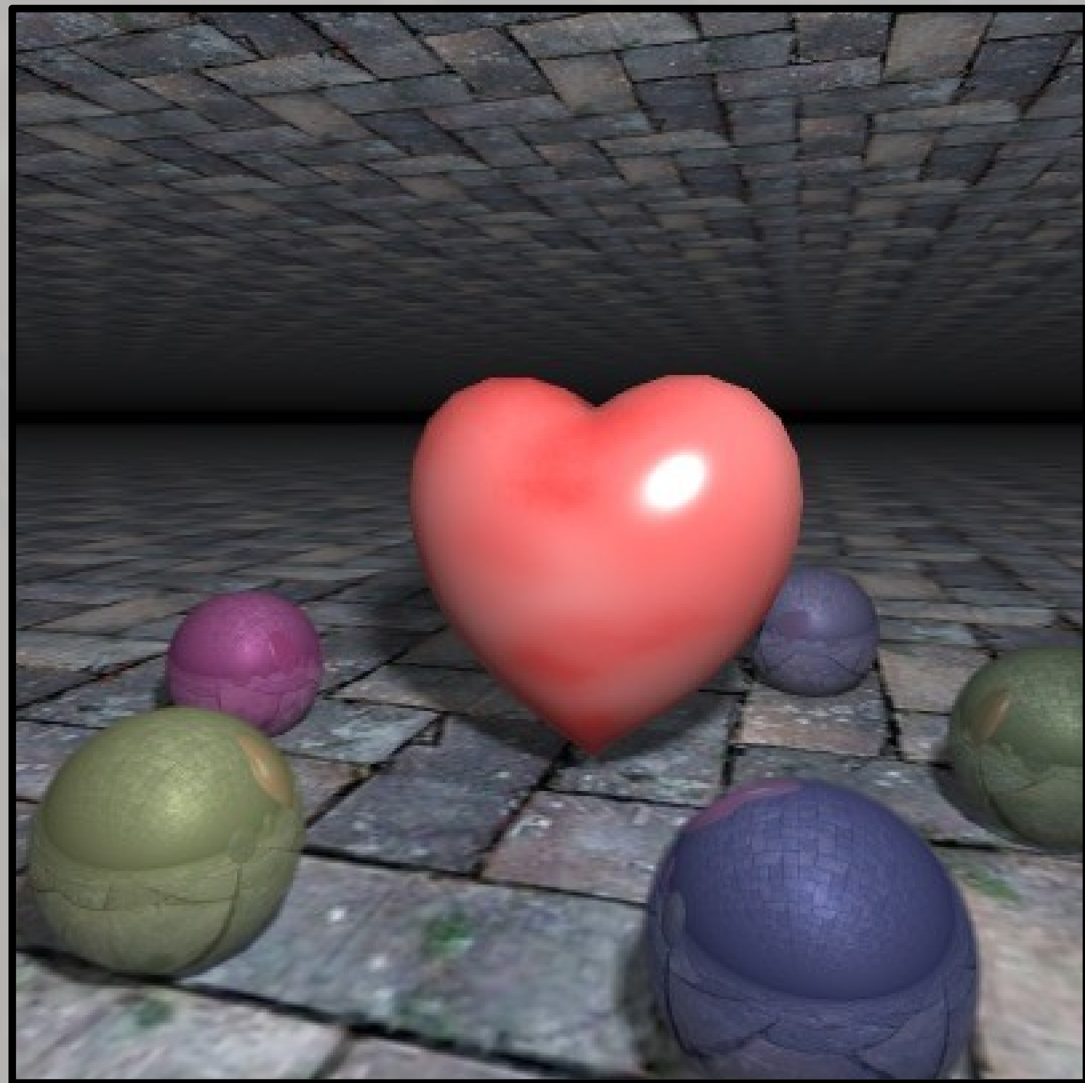
- Съществуват още много начини за създаване на триъгълни мрежи
- Не е нужно човек да създава всичко сам, има сайтове с безплатни 3D модели

Свойства на триъгълната мрежа

- Само повърхности vs обекти с обем
- Херметически затворени vs отворени обекти
  - Например, цилиндър, сфера, куб са затворени, докато чайникът не е
- Гладки vs твърди стени
  - Мрежите са фундаментално твърди (фасетни), но могат да се направят да изглеждат гладки чрез подходяща интерполация на нормалите вътре в триъгълниците
    - Това изисква да пазим по един нормален вектор във всеки връх (и те да са различни)

Свойства на триъгълната мрежа





Представяне на триъгълната мрежа

- Триъгълната мрежа е просто списък с триъгълници
  - Можем да ги пазим в един vector<>, като за всеки триъгълник помним 3-те му върха и нормалата му
  - Но това е неефективно: в един реалистичен mesh, доста от върховете съвпадат (споделени са между няколко триъгълника)
    - Същото се отнася и за нормалите на върховете, често и за текстурните (UV) координати
  - Ето защо ще пазим един списък с всички върхове, нормали и UV координати, а триъгълниците ще индексират в тези масиви

Представяне на триъгълната мрежа

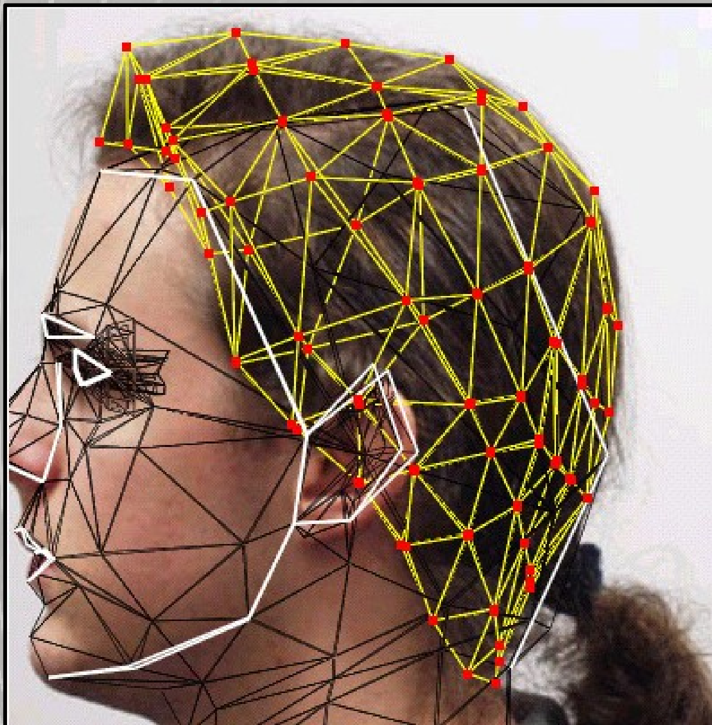
```
struct Triangle {
   int v[3], n[3], t[3];
   Vector gnormal; // geometric normal of the triangle itself
};

class Mesh: public Geometry {
   vector<Vector> vertices;
   vector<Vector> normals;
   vector<Point> uvs;
   vector<Triangle> triangles;
...
```

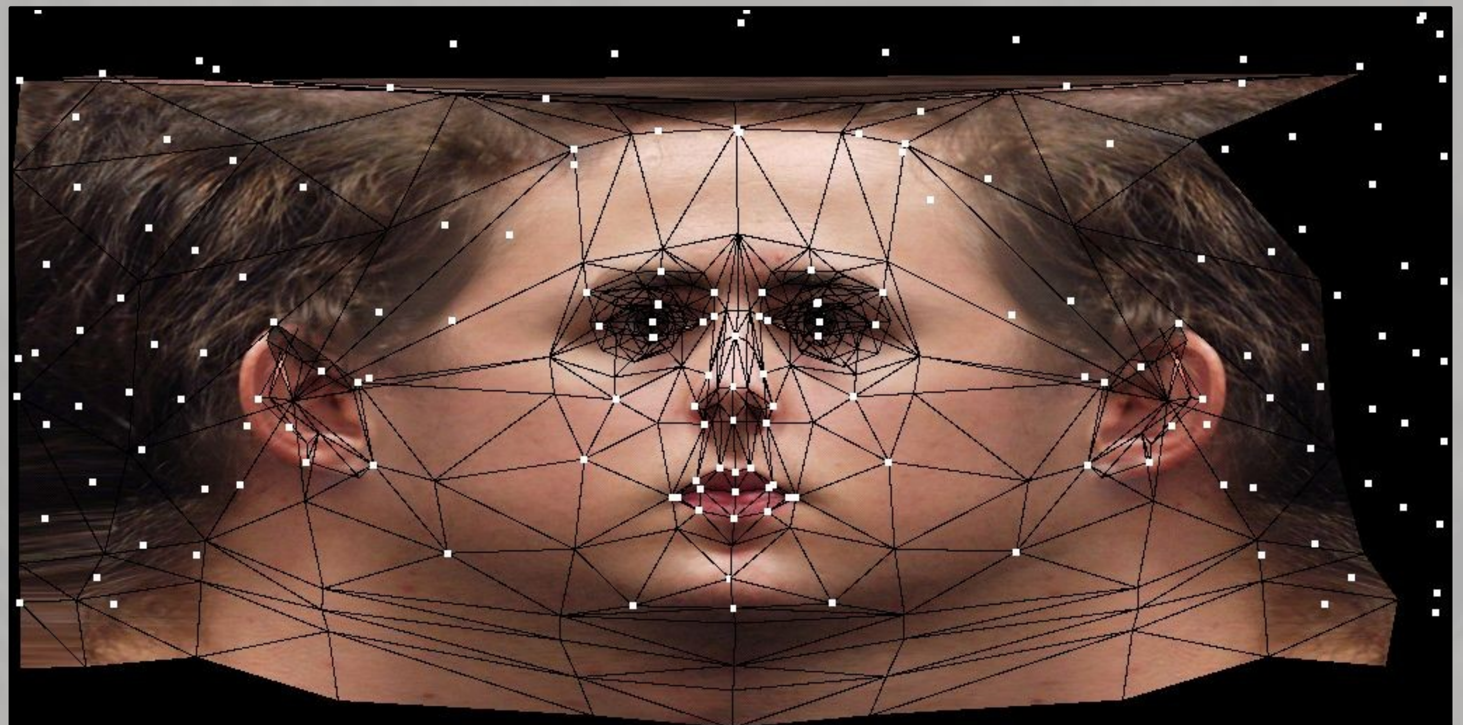
Представяне на триъгълната мрежа

- Т.е. за всеки триъгълник имаме:
  - Три върха, които дефинират положението му в пространството
  - Един „истински“ нормален вектор (пресметнат от 3-те върха)
  - Три нормални вектора, за всеки от върховете
    - Потенциално различни, особено за гладки повърхности
    - Показват нормалата на повърхността в тази точка
    - Интерполират се между трите върха; ще демонстрираме по-нататък
  - Три UV координати (за текстуриране)
    - Също се интерполират между трите върха

Текстурни (UV) координати

- Идеята е, че всеки 3D триъгълник съответства на 2D триъгълник в текстурното пространство
  - Т.е. всеки 3D триъгълник може да бъде облепен с произволен триъгълен отрязък от текстурата.





Интерполация в триъгълник

- Споменахме, че ще ни трябва интерполация в триъгълник; само че как точно ще я реализираме?
- Барицентрични координати: нека имаме триъгълник ABC и произволна точка P в него; барицентричните координати на точката P са числата λ_1, λ_2, λ_3, за които:

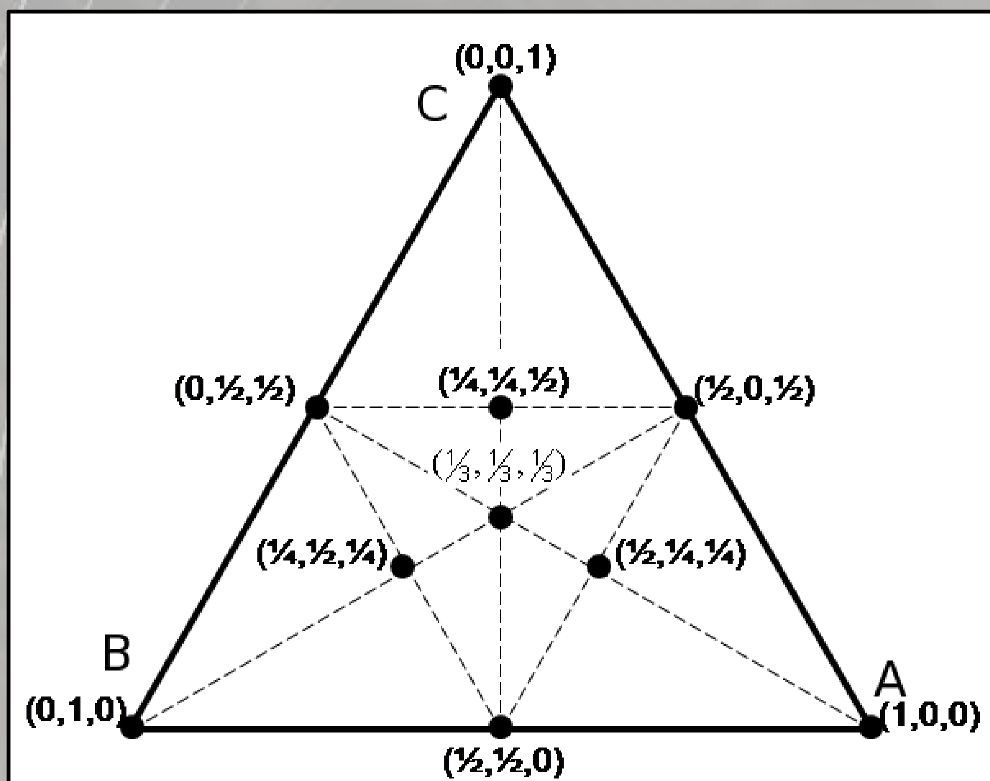
$$P = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C,$$

и е изпълнено че:

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Барицентрични координати



- На практика може да работим само с λ_2 и λ_3, тъй като $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3$.
- Нова дефиниция:

  $P = A + (B\text{-}A)\lambda_2 + (C\text{-}A)\lambda_3 \quad (*)$

  $0 \le \lambda_2, \lambda_3 \le 1$

  $\lambda_2 + \lambda_3 \le 1$
- Т.е. дефинирахме нещо като координатна система

Интерполация в триъгълник

- Ако във формулата (*) вместо точките A, B, C заместим със съответните нормали в трите върха, и имаме конкретни λ_2, λ_3, то интерполираме между нормалите в трите върха
- Аналогично, ако вместо A, B, C заместим UV координатите в трите върха, то интерполираме между UV координатите

Пресичане с триъгълна мрежа

- Алгоритъм за пресичане с триъгълна мрежа:

```
procedure intersectMesh(ray, info):
   minDist = +∞
   foreach triangle T in mesh:
      distance = intersectTriangle(T, ray, tempInfo)
      if distance < minDist:
         minDist = distance
         info = tempInfo
   return minDist
```

Пресичане с триъгълник

- Три точки в пространството лежат в една равнина
- Следователно може да сведем задачата за пресичане на лъч с триъгълник до такава за пресичане на лъч с равнина
  - Само че ни интересува пресечната точка да е точно в отрязъка на равнината, в който се намира триъгълника
  - За целта, ще намерим барицентричните координати на пресечната точка на лъча с равнината, и ще проверим дали изпълняват условията за барицентрични координати

Пресичане с триъгълник

- Дадено:
  - A, B, C – върхове на триъгълника
  - O – начало на лъча
  - D – посока на лъча
- Търси се:
  - λ_2, λ_3
  - γ – разстоянието до пресечната точка

Пресичане с триъгълник

- Пресечната точка може да дефинираме така:

  $X = O + \gamma D = A + \lambda_2(B\text{-}A) + \lambda_3(C\text{-}A)$

  Т.е.,

  $\lambda_2(B\text{-}A) + \lambda_3(C\text{-}A) - \gamma D = O - A$

- Това е система линейни уравнения (3 уравнения, 3 неизвестни):

  $\lambda_2(B.x\text{-}A.x) + \lambda_3(C.x\text{-}A.x) - \gamma D.x = O.x - A.x$

  $\lambda_2(B.y\text{-}A.y) + \lambda_3(C.y\text{-}A.y) - \gamma D.y = O.y - A.y$

  $\lambda_2(B.z\text{-}A.z) + \lambda_3(C.z\text{-}A.z) - \gamma D.z = O.z - A.z$

Пресичане с триъгълник

- Можем да приложим правилото на Крамер за намиране решението на такава линейна система
- Забележка: може да пресмятаме детерминантите на матриците по следния начин: тъй като всеки стълб от матрицата е 3D вектор, то самата детерминанта е смесеното произведение от тези 3 вектора. Т.е. ако стълбовете са вектори a, b и c, то детерминантата се изчислява като:

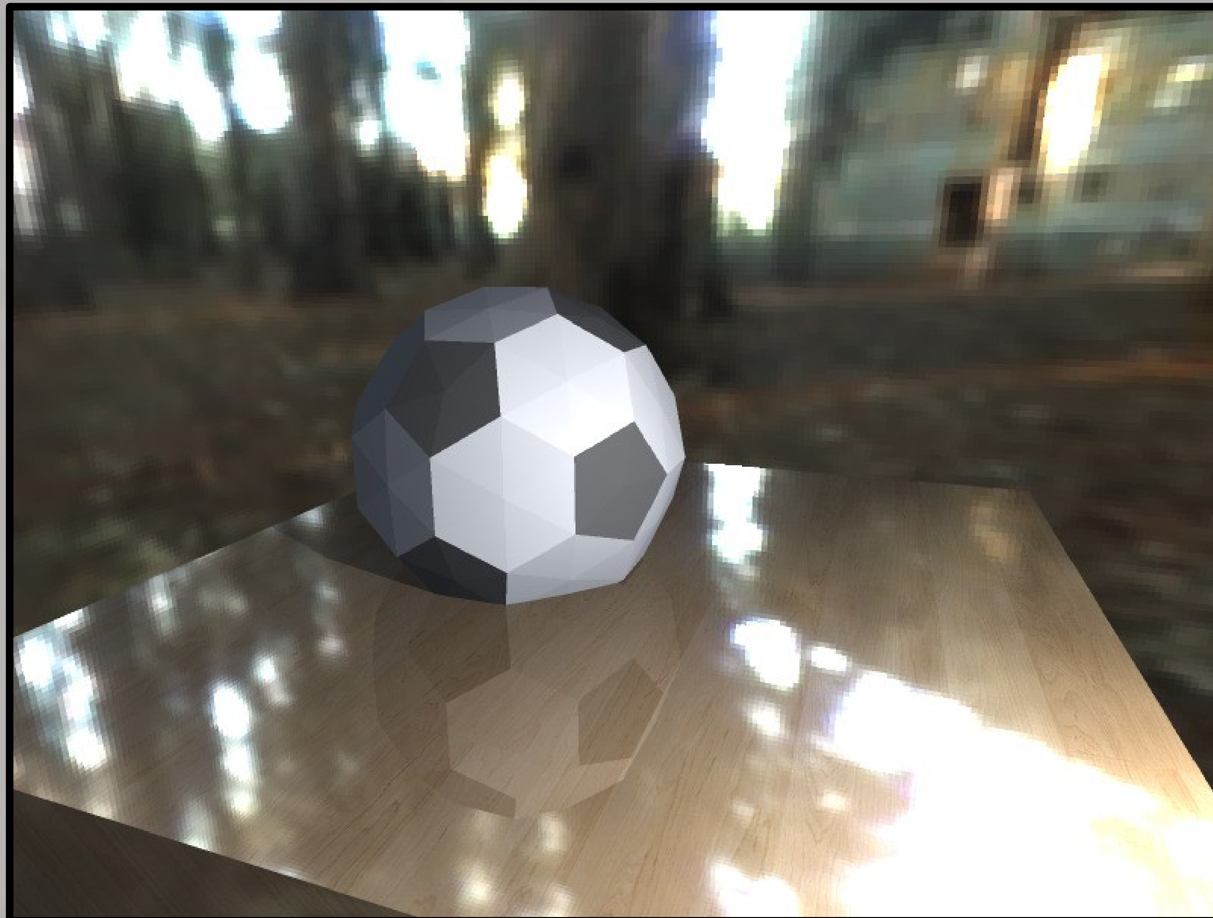
  Det = (a ^ b) * c

Решение на системата

- Det_{cr} = ((B-A)^(C-A)) * -D
- Нека H = (O-A)
  λ_2 = ((H^(C-A)) * -D) / Det_{cr}
  λ_3 = (((B-A)^H) * -D) / Det_{cr}
  γ = (((B-A)^(C-A)) * H) / Det_{cr}

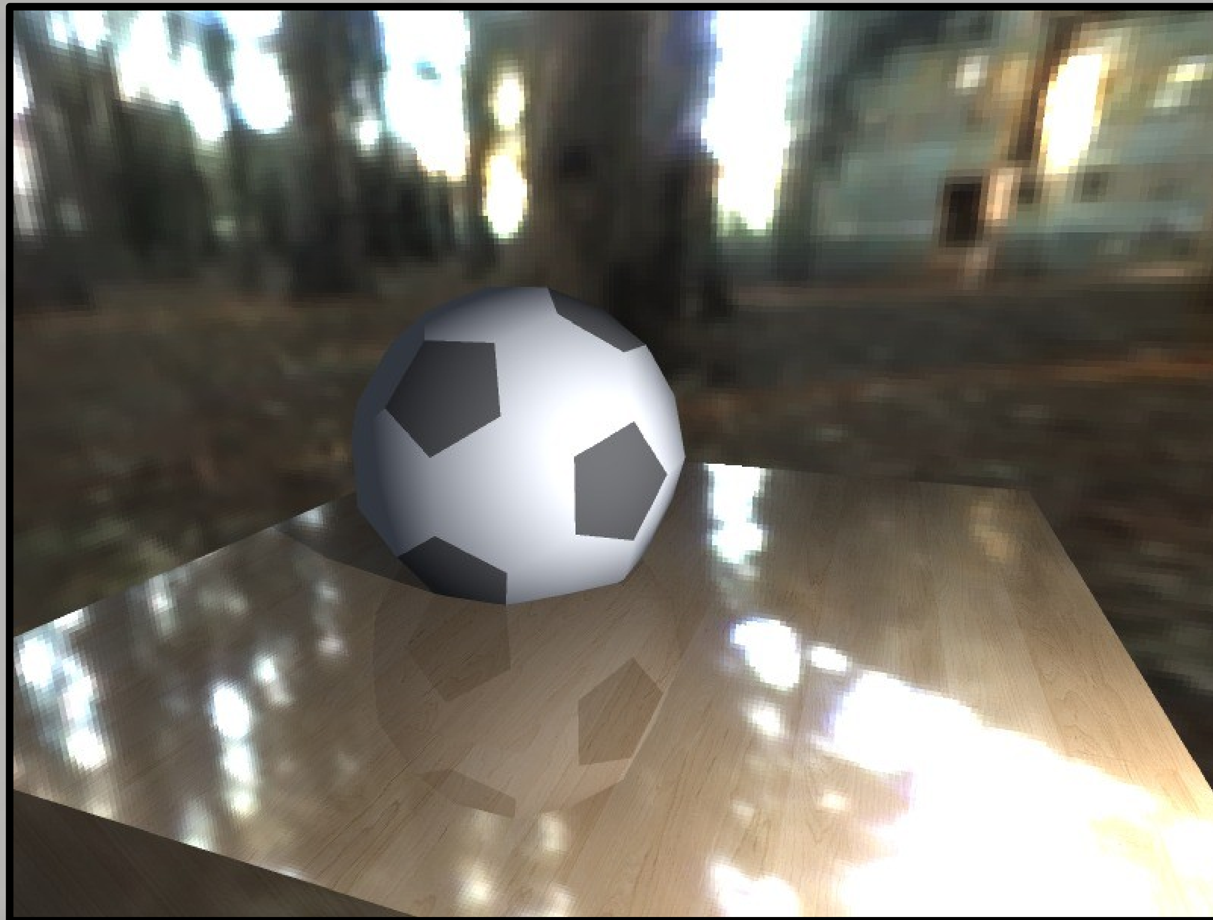
Резултат

- Ако в info->norm слагаме геометричния нормал на триъгълника, т.е. не интерполираме нормалите:



Резултат

- Интерполиране на нормалите:
  $n = normalize(nA + \lambda_2*(nB - nA) + \lambda_3*(nC-nA))$



Оптимизации

- Ако повърхнината е затворена херметически, може да пропускаме триъгълниците, за които (gnormal * ray.dir > 0). Те са от „задната“ страна на триъгълната мрежа и няма шанс да ги пресечем, освен ако не тръгваме отвътре
- Може да опишем сфера или куб около триъгълната мрежа и да проверим в самото начало дали лъча пресича тази описваща геометрия. Ако не пресича нея, значи не пресича и мрежата.